e et π sont transcendants

Jean TRANTHAN
Décembre 2007

Rappel, on dit qu'un nombre est algébrique s'il est une racine d'un polynome à coefficients entiers. Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique.

On va démontrer le théorème A suivant:

$$K+c_1e^{\beta_1}+c_2e^{\beta_2}+...+c_me^{\beta_m}\neq 0$$

Pour:
Cas I) K, c_i : entiers non nul, β_i : entiers distints
ou bien
Cas II) K, c_i = c : entiers non nul, β_i les conjugués distints (les racines distintes d'un polynome à coeff entiers)

Dem:
L'idéee c'est trouver une suite d'entiers NON NUL qui converge vers zéro.
On pose:

$$f(x)=\frac{v^{mp}x^{p-1}}{(p-1)!}(x-\beta_1)^p(x-\beta_2)^p...(x-\beta_m)^p$$ Avec p=premier

et

$$I(s)=\int_0^s e^{s-x}f(x)dx$$ Avec s=complexe

I(s) c'est donc un nombre complexe, l'intégrale se fait sur n'importe quel chemin de 0 à s
C'est I(s) que nous allons étudier.

I. Majoré I(s):
$|x| <= |s|$, $|x-s| <= |s|$
$|e^{s-x}| <= |e^{R(s-x)}| <= e^{|s|}$
$|f(x)| <= f^*(|x|) <= f^*(|s|)$

$$f^*(x)=\frac{v^{mp}x^{p-1}}{(p-1)!}(x+|\beta_1|)^p(x+|\beta_2|)^p...(x+|\beta_m|)^p$$

on a:

$$|I(s)|<=|\int_0^s|e^{s-x}f(x)|dx|$$

$$<=e^{|s|}f^*(|s|)|\int_0^s dx|$$

$<= |s|e^{|s|}f^*(|s|)$
ça donne:
$|I(s)|<= |s|e^{|s|}\ |v|^{mp}|s|^{p-1}(|s|+|\beta_1|)^p(|s|+|\beta_2|)^p...(|s|+|\beta_m|)^p$
$<= |s|e^{|s|}\ |v|^{mp}|s|^{p-1}(|s|+|\beta|)^{mp}$ ou $|\beta|$ = max des $|\beta_i|$
donc
$|I(s)|<= A\ M^p/(p-1)!$ qui tend vers 0 quand p ----> infini

II. Relation Hermite:

$$I(s)=\int_0^s e^{s-x} f(x)dx$$

Avec s=complexe

Intégration par patie

u = f(x) u' = f'(x)

v = e^{s-x} V = $-e^{s-x}$

$$I(s)=[-e^{s-x} f(x)]_0^s+\int_0^s e^{s-x} f'(x)dx$$

$$I(s)=e^s f(0)-f(s)+e^s f'(0)-f'(s)+\int_0^s e^{s-x} f''(x)dx$$

finalement (relation Hermite) :

$$I(s)=e^s \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(s)$$

Où n = d°f = mp+p-1

Appliquer cette relation à β_i et sommons sur i

$$\sum_{i=1}^{m} c_i I(\beta_i)=\sum_{i=1}^{m} c_i e^{\beta_i} \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

$$=(K+\sum_{i=1}^{m} c_i e^{\beta_i})\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)-K\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

posons:

$$A_p=\sum_{i=1}^{m} c_i I(\beta_i)$$

$$B_p=K\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

voyons de plus prés le terme:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

au lieu de sommer en lignes j (puis en colonnes i) , on ne voit rien !!! par contre si on somme en colonnes i d'abord (puis en lignes j) alors là on voit quelque chose. En effet en sommant en colonne i le résultat est un nombre entier , non seulemnt c'est un nombre entier mais en plus c'est un multiple de p. permutons donc les 2 sommes.

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

III. Etudier les sommes:

$$\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$$

Voyons de plus pres $f^{(j)}(0)$ et $f^{(j)}(\beta_i)$

Pour $f^{(j)}(0)$:

cas $j < p-1$ ===> $f^{(j)}(0) = 0$ car il y a le facteur x dans le produit
pour $j = p-1$ on utilise la formule de Taylor:
....+ $f^{(p-1)}(0)x^{(p-1)}/(p-1)!$+ ... = $x^{p-1}(x-\beta_1)^p(x-\beta_2)^p...(x-\beta_m)^p/(p-1)!$

or

$f^{(p-1)}(0)$ est le terme constant de $(x-\beta_1)^p(x-\beta_2)^p...(x-\beta_m)^p$

donc pour $j = p-1$ ===> $f^{(p-1)}(0) = v^{mp}(\beta_1\beta_2...\beta_m)^p$

cas $j >= p$ ===> $f^{(j)}(0) = pA_i$ A_i=complexe (voir ci-dessus)

Pour $f^{(j)}(\beta_i)$:

cas $j < p-1$ ===> $f^{(j)}(\beta_i) = 0$ car il y a le facteur $x-\beta_i$ dans le produit

cas $j = p-1$ ===> $f^{(p-1)}(\beta_i) = 0$ car il y a le facteur $x-\beta_1$ dans le produit

pour $j >= p$ écrivons f(x) autrement

$$f(x) = v^{mp}/(p-1)!\sum_{i=0}^{mp} b_i x^{i+p-1}$$

d'où

$$f^{(p)}(x) = v^{mp}/(p-1)!\sum_{i=1}^{mp} A_{i+p-1}^{p} b_i x^{i-1}$$

$$f^{(p)}(x) = v^{mp}p!/(p-1)!\sum_{i=1}^{mp} C_{i+p-1}^{p} b_i x^{i-1}$$

donc

cas $j >= p$ ===> $f^{(j)}(\beta_i) = pA_i$ A_i=complexe (c'est ici on a besoin 1/(p-1)! pour qu'il reste p au lieu de p!)

En resumé:
on a:
$f^{(p-1)}(0) = v^{mp}(\beta_1\beta_2...\beta_m)^p$

$f^{(j)}(\beta_i) = pA_i$ pour j<>p-1 avec A_i=complexe

β_i \ j	0 ..... p-2	p-1	p ....
0	0 car x() ()	$v^{mp}(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)^p$	$f^{(j)}(0) = 0 \pmod p$
β_i	0 car ()$(x-\beta_i)$()	0 car $(x-\beta_i)$	$f^{(j)}(\beta_i) = pA_i$ A_i complexe
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i) = pH_j \quad H_j \text{ entier}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) = v^{mp}(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)^p = v^{mp-p}(-1)^{mp}u^p \pmod p$$

$f^{(j)}(\beta_i)$ est de la forme pA_i ou A_i est un nombre complexe donc on ne peut pas parler de 'modulo' !! par contre la some

$$\sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$$

(que nous allons démontrer) est un nombre entier !!

$$g(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m) = \sum_{i=1}^{m} f^{(j)}(\beta_i)$$

c'est un polynome à coefficients entiers (car les $f^{(j)}$ sont des polynomes à coefficients entiers), symétrique en β_i donc d'après le théoreme des polynomes symétriques, il existe un polynome h à coefficients entiers des polynomes élémentaires de β_1 , β_2 ,... β_m. tel que:

$$g(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m) = h(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m) = rationnel$$

car les

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m) = rationnel$$

Car les β_i sont des racines d'un polynome à coefficients entiers

dans la définition de f(x) le v^{mp} chasse les dénominateurs ainsi g est un entier.

$$\sum_{i=1}^{n} f^{(j)}(\beta_i)$$

est bien un entier

de plus c'est un entier = 0 (mod p) puisque $f^{(j)}(\beta_i) = pA_i$, A_i=complexe

donc pour chaque j on a:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i) = p\sum_{i=1}^{n} c_i A_i = pH_j$$

H_j complexe

C'est ici on a besoin les condictions (cas I et cas II) sur K, les c_i et les β_i pour que

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(j)}(\beta_i)=pH$$ H entier

soit un entier mod p

finalement

$$B_p=K\sum_{j=0}^{n}f^{(j)}(0)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(j)}(\beta_i)=Kv^{mp}(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)^p+pH$$

$$B_p=K\sum_{j=0}^{n}f^{(j)}(0)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_i f^{(j)}(\beta_i)=Kv^{mp-p}(-1)^{mp}u^p+pH$$

si on prend p > sup (|K|,|v|,|u|) on aura
B_p <>0 (mod p) donc B_p est un entier NON NUL alors que A_p tend vers 0 quand p tend vers infini donc contradition. On a donc:

$$K+\sum_{i=1}^{m}c_i e^{\beta_i}\neq 0$$

Le théoreme est ainsi démontré.

e transcendant

supposons que e soit algébrique , il existe donc un polynome P(x) à coefficients entiers qui annulle e
P(e) = 0

$$K+\sum_{i=1}^{m}c_i e^{i}=0$$

ce n'est pas possible d'après le théoreme A (cas I)

π transcendant

Supposons que iπ soit algébrique.
il exist alors un polynome P(x) à coefficients entiers tel que P(iπ)=0
soient a_1=iπ , a_2 , ...a_n les racines de ce polynome P(x)
formons le produit

$$(e^{i\pi}+1)(e^{\alpha_2}+1)\dots(e^{\alpha_n}+1)=0$$

en groupant les puissances nulles on trouve:

$$K+\sum_{i=1}^{m}e^{\beta_i}=0$$ K entier

Où les β_i sont de la forme

$(*)\beta_i=\sum\theta_i\alpha_i$ Avec q_i = 0 ou 1

Il faut maintenant montrer que les β_i sont des racines d'un polynome à coefficients entiers

Considèrons le polynome

$$Q(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m)$$

et montrons que ses coefficentes sont rationnels. Ces coefficients, au signe prés, sont les polynomes symetriques élélmentaires s de β_i, en remplacant les β_i par ses valeurs (*) on a:

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_m)=g(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

on voit que g est un polynome à coefficients entier, et symetrique en a_i (en permutant les a_i revient à permuter les β_i)

D'après le théoreme des polynomes symétriques, il existe un polynome h à coefficients entier des polynomes symétriques élémentaires de a_i tel que

$$g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=h(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=rationnel$$

En clair: si les a_i sont des racines d'un polynome à coefficients entiers, pour tout polynome symétrique à coefficients entier g alors $g(a_1,a_2,...)$ est un rationnel.

Ainsi Q(x) est un polynome à coefficients rationnels. En multipliant Q(x) par un entier L, on chasse ainsi les dénominateurs et obtient finalement un polynome T(x) = LQ(x) à coefficients entiers.

les β_1 , β_2 , ...β_i sont donc des racines du polynome T(x) à coefficients entiers (les conjugués, théorème A cas II) donc,

$$K+\sum_{i=1}^{m} e^{\beta_i} \neq 0$$

contraditoire donc $i\pi$ est transcendant, par suite π est transcendant,.

Remarque:

1. On ne peut pas fabriquer la relation

$$K+\sum_{i=1}^{m} e^{\beta_i}=0$$

directement à partir du polynôme qui annule π comme dans le cas de e

2. Il faut donc passer par la relation d'Euler et former le produit:

$$(e^{i\pi}+1)(e^{\alpha_2}+1)...(e^{\alpha_n}+1)=0$$

du coup c'est $i\pi$ qu'on étudie et non pas π

3.Untiliser 2 fois le théorème des polynôms symétriques.

Lorsque Hermite démontre la trancendance de e (1873) il n'y a aucun problème pour montrer que la somme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_i f^{(j)}(\beta_i)$$

est un entier et (modulo p) (il n'y a que des nombres entiers)

Mais pour démontrer la transcendance de π il est coincé car on fait intervenir des nombres complexes donc on ne peut pas parler de 'modulo' !! il a donc laissé tomber le problème.

C'est à Lindemann (en 1882 , neuf ans plus tard) qui a eu l'idée de prendre les c_i = c constant et de sommer cette somme d'abord en colonne et d'utiliser le théorème des polynômes symétriques pour montrer effectivement que cette somme est en fait un nombre entier modulo p. Vous voyez par fois il suffit peu de chose pour avancer !!!